SOLUCIONES

1. Una función de varias variables es continua en un punto $\bar{a}=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ de su dominio si $\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta(\varepsilon)>0$ tal que si $\bar{x}\in Dom(f)$ y $\|\bar{x}-\bar{a}\|<\delta$ se cumple que $|f(\bar{x})-f(\bar{a})|<\varepsilon$. Se escribe $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x})=f(\bar{a})$

---

2. $f(x,y)$ será diferenciable en $(1,0)$ si el siguiente límite es cero

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\left|f(x,y)-f(1,0)-(x-1)\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)-(y-0)\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\right|}{\|(x,y)-(1,0)\|}=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\left|(x-1)^2\cos\frac{1}{(x-1)^2+y^2}-0-(x-1)\cdot 0-(y-0)\cdot 0\right|}{\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}}=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\left|(x-1)^2\cos\frac{1}{(x-1)^2+y^2}\right|}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=\lim_{r\to 0}\frac{(r\cos\theta)^2\left|\cos\frac{1}{(r\cos\theta)^2+(r\,\mathrm{sen}\,\theta)^2}\right|}{\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\,\mathrm{sen}\,\theta)^2}}=$$

(Pasando a coordenadas polares
$x-1=r\cos\theta$
$y-0=r\,\mathrm{sen}\,\theta$)

$$=\lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos^2\theta\left|\cos\frac{1}{r^2}\right|}{\sqrt{r^2}}=0$$

NOTA.- $0\cdot$(valores acotados)
luego $f(x,y)$ es diferenciable en $(1,0)$

NOTA.- Calculamos por la definición

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x,0)-f(1,0)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2\cos\frac{1}{(x-1)^2}}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}(x-1)\cos\frac{1}{(x-1)^2}=0\cdot\text{valor acotado}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(1,y)-f(1,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y}=\lim_{y\to 0}0=0$$

3. $g(x,y)$ es un polinomio, luego es una función diferenciable en todos los puntos del plano $\mathbb{R}^2$.

I.- Por ser diferenciable en $(1,2)$ tiene plano tangente

$$g(1,2) = 1 + \cancel{4} - 3 - \cancel{4} + 5 = 3$$

$$z - g(1,2) = (x-1)\,\frac{\partial g}{\partial x}(1,2) + (y-2)\,\frac{\partial g}{\partial y}(1,2)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3 \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial x}(1,2) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y - 2 \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial y}(1,2) = 2$$

$$z - 3 = (x-1)\cdot 0 + (y-2)\cdot 2$$

$\boxed{2y - z - 1 = 0}$ es el plano tangente en $(1,2,3)$

II.- Por ser diferenciable $g(x,y)$ en $(1,2)$ podemos calcular la derivada direccional como producto escalar del vector gradiente de $g(x,y)$ en el punto $(1,2)$ por el vector unitario en la dirección y sentido de la derivada direccional.

$$\nabla g(x,y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\,,\,\frac{\partial g}{\partial y}\right) = \left(3x^2-3,\ 2y-2\right)$$

$$\nabla g(1,2) = (0,2)$$

La derivada direccional es máximo en la dirección del vector gradiente, luego

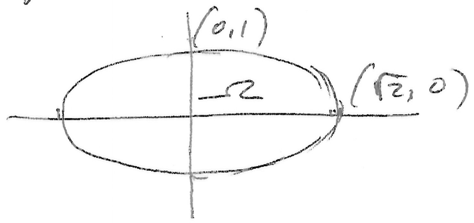
$$D_{\frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}}\, g(1,2) = \nabla g(1,2) \underset{\text{producto escalar}}{\cdot} \frac{\nabla g(1,2)}{\|\nabla g(1,2)\|} = (0,2)\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = (0,2)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 2$$

4. Ω es un conjunto cerrado y acotado, $h(x,y)$ es una función continua en todo $\mathbb{R}^2$ y por lo tanto en Ω, el teorema de Weierstrass asegura que existen el máximo y mínimo absolutos de $h(x,y)$ en Ω.

Buscamos los extremos relativos en el interior de Ω

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial h}{\partial x} = 8x = 0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial y} = 2y = 0 \end{array}\right\}$$ $(0,0)$ es el único punto estacionario que sí está en el interior de Ω

El contorno de Ω es la elypse centrada en $(0,0)$ con semiejes $\sqrt{2}$ y 2



$$A = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 8$$

$$B = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = 0$$

$$C = \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} \det \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = 8 \cdot 2 - 0 = 16 > 0 \\ A = 8 > 0 \end{array}\right\}$$

esto significa que en $(0,0)$ hay un mínimo relativo.

$$h(0,0) = 0 \quad , \quad h(x,y) \geq 0 \, , \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Buscamos los máximos y mínimos en el contorno

$\Gamma = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 - 2 = 0 \}$; la condición es $\varphi(x,y) = 0$

Aplicamos el método de los multiplicadores de Lagrange

$$H(x,y) = h(x,y) + \lambda \, \varphi(x,y)$$

$$H(x,y) = 4x^2 + y^2 + \lambda \left(x^2 + 2y^2 - 2 \right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial H}{\partial x} = 8x + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial H}{\partial y} = 2y + 4\lambda y = 0 \\ \quad x^2+2y^2-2 = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} (8+2\lambda)\,x = 0 \\ (2+4\lambda)\,y = 0 \\ x^2+2y^2-2=0 \end{array}\right\}$$

$x=0$

$2+4\lambda=0$

$\lambda = -\frac{1}{2}$

$2y^2-2=0$

$y^2=1$

$y=\pm 1$

Tenemos los valores $(0,1)$ y $(0,-1)$ con $\lambda=-\frac{1}{2}$

Con $y=0$ $\quad 8+2\lambda=0 \quad \lambda=-4 \quad x^2-2=0$, $x=\pm\sqrt{2}$

Tenemos los puntos $(\sqrt{2},0)$, $(-\sqrt{2},0)$ con $\lambda=-4$

Los puntos estacionarios de la función de Lagrange $H(x,y)$ son los extremos relativos de $h(x,y)$ sobre la curva condición $\varphi(x,y)=0$, siempre que sean puntos regulares de $\varphi(x,y)$

El rango de la matriz de regularidad debe ser 1

$$\text{rango}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = \text{rango}\left(2x\ ,\ 4y\right) = 1\ ,\ \forall (x,y) \neq (0,0)$$

luego los cuatro puntos hallados son puntos regulares de la función condición $x^2+2y^2-2=0$

$$\left.\begin{array}{l} h(0,1) = h(0,-1) = 1 \\ h(\sqrt{2},0) = h(-\sqrt{2},0) = 8 \end{array}\right\} \text{ Valores extremos en el contorno}$$

$h(0,0) = 0$ en el interior

Luego el máximo absoluto de $h(x,y)$ en Ω es 8 y se alcanza en los puntos $(\sqrt{2},0)$, $(-\sqrt{2},0)$. El mínimo absoluto es 0 y se alcanza en $(0,0)$

5. La longitud de un arco de curva C se calcula mediante la fórmula

$$\ell(C) = \int_{x=a}^{x=b} \sqrt{1+[F'(x)]^2}\, dx$$

Podemos calcular $F'(x)$ en nuestro caso mediante el teorema fundamental del cálculo porque la función integrando $\sqrt{\cos t}$ es una función continua en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$.

$\sqrt{\cos t}$ es composición de la función $\cos t \geq 0$ en el intervalo y de la función $\sqrt{t}$ definida $\forall t \geq 0$.

$$F'(x) = \sqrt{\cos x} \quad \text{siendo} \quad F(x) = \int_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=x} \sqrt{\cos t}\, dt$$

Por lo tanto

$$\ell(C) = \int_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=+\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\left(\sqrt{\cos x}\right)^2}\, dx = \int_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=+\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos x}\, dx =$$

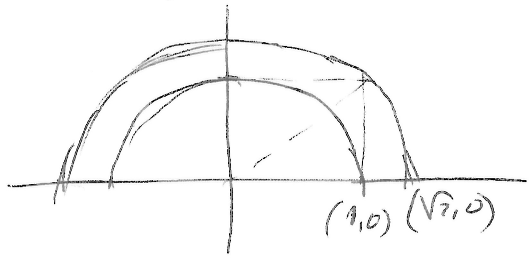
$$= \int_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=+\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}\, dx = \sqrt{2}\int_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=+\frac{\pi}{2}} \cos\frac{x}{2}\, dx = \sqrt{2}\left[2 \cdot \operatorname{sen}\frac{x}{2}\right]_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=+\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \sqrt{2}\left[2 \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - 2\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\left[\cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} - \cancel{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right)\right] =$$

$$= \sqrt{2}\left[2\sqrt{2}\right] = 4$$

6. $$\iint_{\Omega} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

Ω es la media corona circular de radios 1 y $\sqrt{2}$ que está en el semiplano superior



Luego $\varphi_1(\Omega) = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2;\ 1 \le \rho \le \sqrt{2},\ 0 \le \theta \le \pi\}$

Aplicamos el teorema de Fubini para calcular la integral con dos integrales iteradas

$$\iint_{\Omega} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \iint_{\varphi^{-1}(\Omega)} e^{-((\rho\cos\theta)^2+(\rho\operatorname{sen}\theta)^2)}\cdot\rho\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\left(-\frac{1}{2}\right)\underbrace{\left(\int_{\rho=1}^{\rho=\sqrt{2}}(-2)e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\right)}\,d\theta = \left(-\frac{1}{2}\right)\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\left[e^{-\rho^2}\right]_{\rho=1}^{\rho=\sqrt{2}}\,d\theta =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\left(e^{-2}-e^{-1}\right)d\theta = \frac{e^{-1}-e^{-2}}{2}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}d\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}\right)\cdot\left[\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}\right)$$